Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
1A150 - ore 9:30 — 24 settembre 2014
Durata: 3 ore

Attenzione: Riconsegnerete TRE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1,2, e 3) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Si consideri il sistema differenziale nel piano: $\begin{cases} \dot{x} = ye^y \\ \dot{y} = 1 - x^2 \end{cases}$

(a) Si determinino i punti di equilibrio.

(b) Linearizzare il sistema attorno agli equilibri e determinare la natura di tali punti per il sistema linearizzato.

(c) Cosa si può dire riguardo la natura di tali punti per il sistema non linearizzato? Motivare adeguatamente la risposta.

1.2

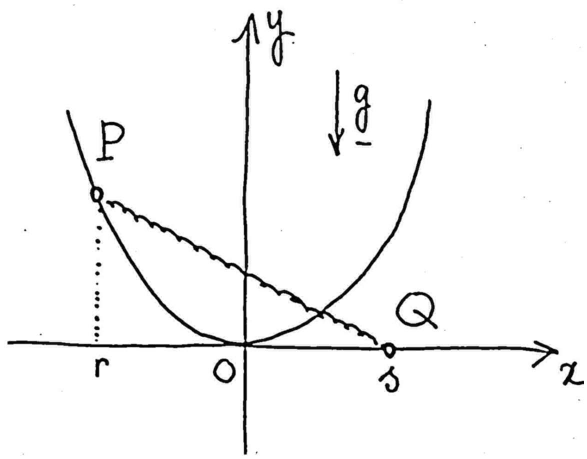
(a) Cosa significa che una funzione continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è integrale primo del campo vettoriale X?

(b) Determinare le costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x, y) = c_1x^2 + c_2y^2$ sia integrale primo del sistema nel piano:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = 2x^2 \end{cases}$$

2

2.1 Nel piano cartesiano Oxy, associato ad un sistema di riferimento inerziale $Oxyz$, con asse y verticale ascendente, un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva di equazione $y = \frac{x^2}{a}, a > 0$. Un altro punto materiale Q di massa m è vincolato all'asse delle x. Il sistema è privo di attrito. I due punti sono collegati da una molla di costante elastica $h > 0$. Sul sistema agisce la forza peso. Scegliendo come coordinate Lagrangiane r ed s, le ascisse dei punti P e Q rispettivamente,



(a) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità,

(b) assumendo che $h = \frac{mg}{a}$, determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile.

2.2 Per un sistema di punti n materiali $P_1, \ldots, P_n$ per il quale siano state assegnate delle opportune leggi-forza $F_1, \ldots, F_n$, sia data una curva $\mathbb{R} \ni t \to OP(t) \in \mathbb{R}^{3n}$, compatibile con degli assegnati vincoli lisci $S \subset \mathbb{R}^{3n}$.

(i) Il fatto che la suddetta curva soddisfi le equazioni cardinali è una condizione *necessaria* o *sufficiente* affinché sia un moto dinamicamente possibile?

(ii) Si conosce qualche caso in cui tale condizione è *necessaria* e *sufficiente*?

3

3.1 Principio variazionale di Hamilton, enunciato e dimostrazione.

3.2 Che relazione sussiste tra le parentesi di Lie $[X, Y]$ che sono definite per generici campi vettoriali $X, Y : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ e le parentesi di Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ qualora X, Y siano campi vettoriali Hamiltoniani, cioè $X = \mathbb{E}\nabla H,\ Y = \mathbb{E}\nabla K$, per $H, K : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$?

Soluzioni

1.1
(a) I punti di equilibrio sono $A = (1, 0)$ e $B = (-1, 0)$.
(b) Il sistema linearizzato attorno ad A è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2(x-1) \end{cases}$$

cui corrisponde la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ di autovalori $\pm i\sqrt{2}$. Ne segue che A è un centro per il sistema linearizzato. Il sistema linearizzato attorno a B è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2(x+1) \end{cases}$$

cui corrisponde la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ di autovalori $\pm\sqrt{2}$. Ne segue che B è una sella per il sistema linearizzato.
(c) B è una sella anche per il sistema non lineare, mentre non è possibile dedurre nulla sulla natura di A per il sistema non lineare, essendo un centro per il sistema linearizzato.

1.2
(b) $L_X f(x, y) = 2c_1 x^2 y + 4c_2 x^2 y \equiv 0$ se e solo se $c_1 = -2c_2$.

2.1
Le coordinate dei punti rilevanti sono:

$$OP = (r, \frac{r^2}{a}), \quad OQ = (s, 0)$$

L'energia potenziale è la funzione

$$V(r, s) = V_{gP} + \underbrace{V_{gQ}}_{=0} + \underbrace{V_{h\,PQ}}_{\frac{h}{2}|PQ|^2} =$$

$$= \frac{mg}{a}r^2 + \frac{h}{2}(r^2 + s^2 - 2rs + \frac{r^4}{a^2}),$$

$$V(r, s) = (\frac{mg}{a} + \frac{h}{2})r^2 - hrs + \frac{h}{2}s^2 + \frac{h}{2a^2}r^4)$$

$$\nabla V(r, s) = \begin{pmatrix} (\frac{2mg}{a} + h)r - hs + 2\frac{h}{a^2}r^3 \\ -hr + ks \end{pmatrix}$$

Si ha, per l'equilibrio, $r = s$. Sostituendo nel primo termine ed uguagliando a zero si ha $0 = 2r(\frac{mg}{a} + \frac{h}{a^2}r^2)$. Pertanto esiste un unico equilibrio

$$r = 0, \quad s = 0$$

$$\nabla^2 V(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2mg}{a} + h & -h \\ -h & h \end{pmatrix}$$

$$T(r, s, \dot{r}, \dot{s}) = \frac{1}{2}m(1 + 4\frac{r^2}{a^2})\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2, \qquad a(0, 0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$0 = \det\left(\nabla^2 V(0, 0) - \omega^2 a(0, 0)\right), \quad \omega_{1,2} = \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})\frac{h}{m}}$$

2.2
E' solo condizione necessaria, diventa anche sufficiente nel caso del corpo rigido libero.